

## ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมว

Mathematical Model for the Transmission of *Lymphatic Filariasis* with Effect of Cat Population

กัลยาณี กล้ากลิ่น<sup>1</sup>, สุรพล เนาวรัตน์<sup>2</sup> และสุรินทร์ สมณะ<sup>3</sup>

### บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างและวิเคราะห์เสถียรภาพตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมว ซึ่งโรคเท้าช้างเป็นโรคติดต่อมาโดยแมลงที่เป็นปัญหาสาธารณสุขที่เกิดจากหนอนพยาธิตัวกลม ที่เป็นสาเหตุส่วนใหญ่เกิดมาจากเชื้อชนิดบรูเกีย มาลาเลีย โดยมียุงเสื่อเป็นพาหะ การวิเคราะห์ตัวแบบโดยวิธีมาตรฐานคือศึกษาจุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบวิธีเชิงวิเคราะห์และหาคำตอบเชิงตัวเลขผลการวิจัยได้ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมวอธิบายด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น 8 สมการ ประกอบด้วย ประชากรคน แบ่งออกเป็น 3 กลุ่มย่อย คือ กลุ่มประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรคนที่ติดเชื้อ กลุ่มประชากรที่เป็นโรคเรื้อรัง และประชากรแมว แบ่งออกเป็น 3 กลุ่มย่อย คือ กลุ่มประชากรแมวที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มประชากรแมวที่ติดเชื้อ กลุ่มประชากรแมวที่ได้รับการรักษาแล้วมีภูมิคุ้มกันหรือหายจากโรค และประชากรยุง แบ่งออกเป็น 2 กลุ่มย่อย คือ กลุ่มประชากรยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ และกลุ่มประชากรยุงที่ติดเชื้อ ผลการวิเคราะห์ตัวแบบพบจุดสมดุลที่ไม่มีโรค มีค่าระดับการติดเชื้อ  $R_0 = 0.4068$  และจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค เมื่อพิจารณาค่าพารามิเตอร์จำนวนประชากรแมวที่เกิดใหม่ ( $\lambda_c$ ) ไม่สามารถหาจุดสมดุลที่มีเชื้อโรคได้ และพิจารณาค่าพารามิเตอร์อัตราการกัดของประชากรยุง (b) พบว่า เมื่ออัตราการกัดของประชากรยุงเท่ากับ 650 ครั้ง/วัน, 1,050 ครั้ง/วัน และ

<sup>1</sup>บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี 84100 ประเทศไทย

<sup>2,3</sup>สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี 84100 ประเทศไทย

1,450 ครั้ง/วัน พบว่า มีค่าระดับการติดเชื้อ ( $\mathcal{R}_0$ ) เพิ่มขึ้น ดังนี้  $\mathcal{R}_0 = 1.0577, 1.7086$  และ 2.3595 ตามลำดับ

**คำสำคัญ:** ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โรคเท้าช้าง ค่าระดับการติดเชื้อ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จุดสมดุลที่เกิดการระบาดของโรค แมว

### Abstract

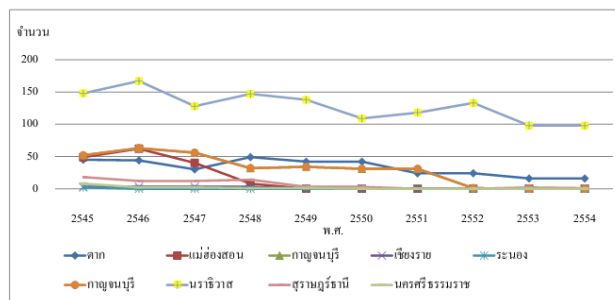
The objectives of this research were to propose and analyze the mathematical model for the transmission of lymphatic filariasis with effect of cat population. Lymphatic filariasis is vector - borne diseases as a public health problem. The disease is mainly cause by *Brugia malayi* parasites and transmitted by *Mansonia* spp. mosquitoes. The equilibrium point and stability of the equilibrium points are analyzed by standard method. Analytic solutions and numerical solutions are carried out. The research results found that a mathematical model for the transmission of lymphatic filariasis with effect of cat population consisting of a system of eight nonlinear differential equations. The mathematical model includes susceptible human, infectious-carrier, infected-chronic, susceptible cat, infectious cat, recovered cat, susceptible mosquitoes and infectious mosquitoes. The results obtained from mathematical model of disease free equilibrium have basic reproductive number  $\mathcal{R}_0 = 0.4068$  and disease endemic equilibrium of the new cat population can't have equilibrium point and when the biting rate equal to 650 times/day, 1050 times/day and 1,450 times/day, we obtain the basic reproductive number  $\mathcal{R}_0 = 0.4068, 1.7086$  and 2.3595, respectively.

**Keywords:** Mathematical model, Lymphatic filariasis, Disease free equilibrium, Endemic disease equilibrium, Cat

### บทนำ

โรคเท้าช้าง (*Lymphatic Filariasis* หรือ *Elephantiasis*) เป็นโรคที่พบได้ทั่วไปบริเวณเขตร้อนชื้นและเขตกึ่งร้อนชื้นแถบเอเชีย แอฟริกา หมู่เกาะแปซิฟิกตะวันตก และบางส่วนของทวีปอเมริกา (WHO.1995:146) โรคเท้าช้างเป็นโรคติดต่อนำโดยแมลงที่เป็นปัญหาสาธารณสุขทั้งในระดับชาติและนานาชาติ โดยมีสาเหตุมาจากหนอนพยาธิตัวกลม ชนิดของหนอนพยาธิตัวกลมที่เป็นสาเหตุ มี 3 ชนิด คือ วูเคอเรอเรีย แบนครอฟไต (*Wuchereria bancrofti*), บรูเกีย มาลาโย

(*Brugia malayi*) และบรูเกีย ทิมอริ (*Brugia timori*) ซึ่งเชื้อเหล่านี้อาศัยร่างกายคนเป็นแหล่งที่อยู่ และอาศัยยุงเป็นพาหะโรค โดยเชื้ออูคูเคอเรอเรีย แบนครอพไฟโต อาศัยยุงลาย (*Aedes spp.*) และยุงรำคาญ (*Culex spp.*) เป็นพาหะ เชื้อบรูเกียมาลาโย อาศัยยุงเสื่อ (*Mansonia spp.*) เป็นพาหะ ส่วนเชื้อบรูเกีย ทิมอริ อาศัยยุงก้นปล่อง (*Anophelesn spp.*) เป็นพาหะ วงจรชีวิตของหนอนพยาธิ ตัวกลมเหล่านี้ เริ่มจากยุงตัวเมียที่มีเชื้อพยาธิทำข้างที่เป็นตัวอ่อนในระยะที่ก่อการติดเชื้อ มากัดดูดเลือดคน เชื้อพยาธิจะเคลื่อนที่ออกจากปากยุง และเข้าสู่ผิวหนังตรงจุดที่ยุงกัดแล้วเดินทางต่อไปยังท่อน้ำเหลืองบริเวณใกล้เคียง หลังจากนั้นจะพัฒนาเปลี่ยนรูปร่าง 2 ครั้งภายในระยะเวลา 9 เดือน จนกลายเป็นตัวเต็มวัยซึ่งมีทั้งตัวผู้และตัวเมีย และเมื่อผสมพันธุ์กันจะได้ตัวอ่อนซึ่งเรียกว่า ไมโครฟิลาเรีย (*Microfilaria*) ตัวอ่อนเหล่านี้จะเคลื่อนที่เข้าสู่หลอดเลือด และเมื่อยุงไปกัดคนที่มิใช่พยาธิตัวอ่อนไมโครฟิลาเรียนี้ ยุงก็จะรับเชื้อเข้าไป เจริญเติบโตในตัวยุงจนกลายเป็นตัวอ่อนระยะติดต่อ ผู้ป่วยเป็นโรคทำข้างพบความชุกชุมสูงในจังหวัดภาคใต้ฝั่งตะวันออก และในพื้นที่บริเวณชายแดนไทย-พม่า จำนวนผู้ป่วย ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 จำนวนผู้ป่วยโรคทำข้างที่ขึ้นทะเบียนการรักษาในปีงบประมาณ 2545–2555  
ที่มา : สำนักโรคติดต่อฯ โดยแมลง กรมควบคุมโรค. 2555.

สำนักงานโรคติดต่อฯ โดยแมลง กระทรวงสาธารณสุข ได้รับการอนุมัติให้จัดทำโครงการกำจัดโรคทำข้างในปี พ.ศ. 2544 โดยมีการวางแผนระยะยาวในการควบคุมป้องกัน การแพร่ระบาดของโรค การเฝ้าระวังและสำรวจโรคทำข้างอย่างใกล้ชิด กำจัดสัตว์รังโรค เช่น แมว และยุงพาหะควบคุมกันไป (สำนักโรคติดต่อฯ โดยแมลง, 2549)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคทำข้างที่มีผลกระทบมาจากแมวซึ่งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ทำให้เราสามารถทราบถึงการแพร่ระบาดของโรคทำข้าง และผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบที่เราสนใจสามารถช่วยให้เราเข้าใจถึงปัจจัยที่ควบคุมการแพร่ระบาดและ

เสถียรภาพของระบบการแพร่เชื้อในวงกว้าง และมีความเข้าใจที่ดีเกี่ยวกับการติดต่อของโรค การเปลี่ยนแปลงของตัวแบบสามารถปรับเปลี่ยนลักษณะเฉพาะของโรคระบาดได้ ในขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูลจะแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพ ไม่ใช่เพียงแค่เข้าใจวิวัฒนาการของการระบาดเท่านั้น แต่ยังเข้าใจถึงมาตรการควบคุมโรคเป็นอย่างไร ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ของการศึกษานี้จะเป็นประโยชน์อย่างสูงในการลดความเสี่ยงของการติดเชื้อโรคทำซ้ำ การแพร่เชื้อและการควบคุมโรคทำซ้ำโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มีการศึกษาเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคทำซ้ำมีอยู่หลากหลาย แต่ได้นำงานวิจัยเรื่อง การแพร่เชื้อและการควบคุมโรคทำซ้ำโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Supriatna & Anggtiani N., 2010) ซึ่งเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ศึกษาต่อมาจาก Supriatna A.K., Serviana H. และ Soewono E. (Supriatna A.K., Serviana H. & Soewono E., 2009)

เพื่อเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยต้องการเพิ่มตัวแปรเป็นประชากรแมวมาเป็นปัจจัยสำหรับศึกษา จึงทำให้ผู้วิจัยได้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคทำซ้ำที่มีผลกระทบมาจากแมว เพื่อให้ได้ตัวแบบที่คาดว่าจะทำให้การป้องกันและควบคุมโรคมีประสิทธิภาพสูงขึ้น

### วัตถุประสงค์

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคทำซ้ำที่มีผลกระทบมาจากแมว
2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคทำซ้ำที่มีผลกระทบมาจากแมว

### วิธีดำเนินการวิจัย

1. การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์
2. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

### ขอบเขตของการวิจัย

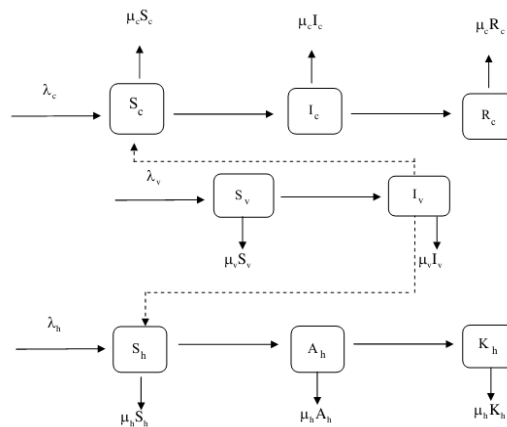
ผู้วิจัยศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคทำซ้ำที่มีผลกระทบมาจากแมว เนื่องจากเป็นตัวแปรสำคัญที่มีผลกระทบต่อการแพร่ระบาดของโรคทำซ้ำ จึงได้แบ่งตัวแปรที่เป็นประชากรแมวออกเป็น 3 กลุ่มย่อย ดังนี้ กลุ่มที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มที่ติดเชื้อ และกลุ่มที่ได้รับการรักษาแล้วสร้างภูมิคุ้มกันหรือหายจากโรค ส่วนประชากรคน ได้แบ่งออกเป็น 3 กลุ่มย่อย

ดังนั้น กลุ่มคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มคนที่ติดเชื้อ และกลุ่มคนที่เป็นโรคเรื้อรัง ซึ่งจากข้อมูลข้างต้นทำให้มีความเข้าใจถึงผลกระทบของตัวแปรที่มาจากแมว จึงทำให้เราสามารถนำมาปรับปรุงมาตรการป้องกันและการควบคุมโรค

## ผลการวิจัย

### ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

ในการวิจัยนี้ผู้วิจัยจะนำเสนอตัวแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคเท้าช้างที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากร และลักษณะของการเกิดโรค ซึ่งกำหนดให้จำนวนประชากรมีขนาดคงที่ โดยแบ่งประชากรออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรคน กลุ่มประชากรแมว และกลุ่มประชากรยุง โดยกลุ่มประชากรคนแบ่งออกเป็น 3 กลุ่มย่อย ดังนี้ กลุ่มประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ) กลุ่มประชากรคนที่ติดเชื้อ ( $A_h$ ) และกลุ่มประชากรคนที่เป็นโรคเรื้อรัง ( $K_h$ ) กลุ่มประชากรแมวแบ่งออกเป็น 3 กลุ่มย่อย ดังนี้ กลุ่มประชากรแมวที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_c$ ) กลุ่มประชากรแมวที่ติดเชื้อ ( $I_c$ ) และกลุ่มประชากรแมวที่ได้รับการรักษาแล้วสร้างภูมิคุ้มกันหรือหายจากโรค ( $R_c$ ) และในส่วนของประชากรยุง แบ่งออกเป็น 2 กลุ่มย่อย ประกอบด้วย ประชากรยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_v$ ) และประชากรยุงที่ติดเชื้อ ( $I_v$ ) ตามลำดับ โดยแผนภาพอธิบายแนวคิดในการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์แสดงได้ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

โดยที่  $\lambda_h$  แทนจำนวนประชากรคนที่เกิดใหม่,  $\mu_h$  แทนอัตราการตายของประชากรคน,  $\beta_{ph}$  แทนความน่าจะเป็นของประชากรยุงที่ติดเชื้อแพร่เชื้อไปยังประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อในการกัดหนึ่งครั้ง,  $N_h$  แทนจำนวนประชากรคนทั้งหมด,  $\lambda_c$  แทนจำนวนประชากรแมวที่เกิดใหม่,  $\mu_c$  แทนอัตราการตายของประชากรแมว,  $\beta_{pc}$  แทนความน่าจะเป็นของประชากรยุงที่ติดเชื้อแพร่เชื้อไป

ยังประชากรแมวที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อในการกัดหนึ่งครั้ง,  $N_c$  จำนวนประชากรแมวทั้งหมด,  $r_c$  แทนจำนวนประชากรแมวที่ได้รับการรักษาแล้วสร้างภูมิคุ้มกันหรือหายจากโรค,  $\lambda_v$  แทนจำนวนประชากรยุงที่เกิดใหม่,  $\mu_v$  แทนอัตราการตายของประชากรยุง และ  $\beta_{pv}$  แทนความน่าจะเป็นของประชากรคนที่ติดเชื้อแพร่เชื้อไปยังประชากรยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อในการกัดหนึ่งครั้ง,  $\delta$  แทนอัตราการเกิดอาการของโรค,  $P_0$  แทนความน่าจะเป็นในการรักษาให้หายจากโรค,  $n$  แทนจำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อแล้วได้รับการรักษาด้วยยา,  $b$  แทนอัตราการกัดของประชากรยุง, ตามลำดับซึ่งสามารถนำมาสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมวได้ดังนี้

$$\frac{dS_h}{dt} = \lambda_h - \frac{b\beta_{phv}I_v S_h}{N_h} - \mu_h S_h + \frac{P_0 n \delta A_h^2}{N_h} \quad (1)$$

$$\frac{dA_h}{dt} = \frac{b\beta_{phv}I_v S_h}{N_h} - \mu_h A_h - \delta A_h - \frac{P_0 n \delta A_h^2}{N_h} \quad (2)$$

$$\frac{dK_h}{dt} = \delta A_h - \mu_h K_h \quad (3)$$

$$\frac{dS_c}{dt} = \lambda_c - \frac{b\beta_{pcv}I_v S_c}{N_c} - \mu_c S_c \quad (4)$$

$$\frac{dI_c}{dt} = \frac{b\beta_{pcv}I_v S_c}{N_c} - (\mu_c + r_c)I_c \quad (5)$$

$$\frac{dR_c}{dt} = r_c I_c - \mu_c R_c \quad (6)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \lambda_v - \frac{b\beta_{pv}A_h S_v}{N_h} - \frac{b\beta_{pvc}I_v S_v}{N_c} - \mu_v S_v \quad (7)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{b\beta_{pv}A_h S_v}{N_h} + \frac{b\beta_{pvc}I_v S_v}{N_c} - \mu_v I_v \quad (8)$$

เมื่อ  $S_h + A_h + K_h = N_h$ ,  $S_c + I_c + R_c = N_c$ ,  $S_v + I_v = N_v$

## การวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

### 1. จุดสมดุล

จุดสมดุล สามารถหาได้จากการจัดสมการ (1), (2), (4), (5) และ (8) ให้เท่ากับศูนย์ (Leah, 1998) จะได้จุดสมดุลสองจุดคือ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค  $E_0(S_h, A_h, S_c, I_c, I_v) = (\frac{\lambda_h}{\mu_h}, 0, \frac{\lambda_c}{\mu_c}, 0, 0)$  และจุด

สมดุลที่เกิดการระบาดของโรค  $E_1(S_h^*, A_h^*, S_c^*, I_c^*, I_v^*)$  เมื่อ  $I_v^* = \frac{b\beta_{pv}A_h^*N_c + b\beta_{pvc}I_c^*N_h}{\mu_h N_h N_c + b\beta_{pv}A_h^*N_c + b\beta_{pvc}I_c^*N_h}$ ,

$$S_h^* = \frac{\lambda_h N_h + P_0 n \delta A_h^2}{b\beta_{phv}I_v + \mu_h N_h}, \quad A_h^* = \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4BD}}{2B},$$

$$S_c^* = \frac{\lambda_c N_c}{b\beta_{pc}I_v + \mu_c N_c} \quad \text{และ} \quad I_c^* = \frac{b\beta_{pc}I_v \left( \frac{\lambda_c N_c}{b\beta_{pc}I_v + \mu_c N_c} \right)}{(\mu_c + r_c)N_c}$$

## 2. ความเสถียรภาพ

ความเสถียรภาพของจุดสมดุลสามารถพิจารณาจากค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียน (Esteva and Vagus, 1998) จากระบบสมการ (1), (2), (4), (5) และ (8) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์จาโคเบียนได้ดังนี้

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & 0 & 0 & -\frac{b\beta_{ph}\lambda_h}{N_h\mu_h} \\ 0 & -\mu_h - \delta & 0 & 0 & \frac{b\beta_{ph}\lambda_h}{N_h\mu_h} \\ 0 & 0 & -\mu_c & 0 & -\frac{b\beta_{pc}\lambda_c}{N_c\mu_c} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_c - r_c & \frac{b\beta_{pc}\lambda_c}{N_c\mu_c} \\ 0 & \frac{b\beta_{pv}}{N_h} & 0 & \frac{b\beta_{pv}}{N_c} & -\mu_v \end{bmatrix}_{E_0}$$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะได้จากสมการลักษณะเฉพาะโดยให้  $\det(J_0 - \lambda I) = 0$  ณ จุด  $E_0$  เมื่อ  $\lambda$  เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) และ  $I$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 5x5

จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค  $E_0$  จากการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะคือ

$\lambda_1 = -\mu_h$ ,  $\lambda_2 = -\mu_c$  และ  $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$  โดยที่  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_1 a_2 > a_3$  สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz (Leah, 1998)

โดยที่

$$a_1 = \mu_h + \delta + \mu_c + r_c + \mu_v$$

$$a_2 = \left\{ \begin{array}{l} \mu_h\mu_c + \mu_h r_c + \mu_c\delta + \delta r_c + \mu_h\mu_v + \mu_v\delta \\ + \mu_c\mu_v + \mu_v r_c + \frac{b\beta_{pv}b\beta_{ph}\lambda_h}{N_h N_h \mu_h} - \frac{b\beta_{pv}b\beta_{pc}\lambda_c}{N_c N_c \mu_c} \end{array} \right\}$$

$$a_3 = \left\{ \begin{array}{l} \mu_v(\mu_h\mu_c + \mu_h r_c + \mu_c\delta + \delta r_c) + \left(\frac{b\beta_{pv}}{N_h}\right)(-\mu_c - r_c)\left(\frac{b\beta_{ph}\lambda_h}{N_h\mu_h}\right) \\ + (-\mu_h - \delta)\left(\frac{b\beta_{pv}b\beta_{pc}\lambda_c}{N_c N_c \mu_c}\right) \end{array} \right\}$$

ดังนั้นจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคมีความเสถียรภาพเมื่อ  $\mathcal{R}_0 < 1$  โดยที่

$$\text{ค่าระดับการติดเชื้อของโรค } \mathcal{R}_0 = \sqrt{\left(\frac{b\beta_{pv}}{N_h}\right)\left(\frac{1}{\mu_h + \delta}\right)\left(\frac{b\beta_{ph}\lambda_h}{N_h\mu_h\mu_v}\right) + \left(\frac{b\beta_{pv}}{N_c}\right)\left(\frac{1}{\mu_c + r_c}\right)\left(\frac{b\beta_{pc}\lambda_c}{N_c\mu_c\mu_v}\right)}$$

จุดสมดุลภายใต้สภาวะที่เกิดการระบาดของโรค  $E_1(s_h^*, A_h^*, s_c^*, i_c^*, i_v^*)$  สมการลักษณะเฉพาะ (Esteva and Vagus, 1998) คือ

$$\lambda_1 = -\frac{b\beta_{ph}i_v^*}{N_h} - \mu_h, \quad \lambda_2 = -\mu_h - \delta - \frac{2P_0\delta A_h^*}{N_h} \quad \text{และ} \quad \lambda^3 + m_1\lambda^2 + m_2\lambda + m_3 = 0 \quad \text{โดยที่ } m_1 >$$

0,  $m_3 > 0$ ,  $m_1m_2 > m_3$  สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz (Leah, 1998)

$$m_1 = \left( \mu_v + \frac{b\beta_{pc}i_v^*}{N_c} + \mu_c + \mu_c + r_c \right), \quad m_2 = \left( \frac{b\beta_{pc}i_v^*\mu_v}{N_c} + \mu_c\mu_v + \mu_c\mu_v + \mu_v r_c + \frac{b\beta_{pc}i_v^*\mu_c}{N_c} + \frac{b\beta_{pc}i_v^*r_c}{N_c} \right. \\ \left. + \mu_c\mu_c + \mu_c r_c - \frac{b\beta_{pv}b\beta_{pc}s_c^*}{N_c N_c} + \frac{b\beta_{pv}i_v^*b\beta_{pc}s_c^*}{N_c N_c} \right) \\ m_3 = \left( \frac{b\beta_{pc}i_v^*\mu_c\mu_v}{N_c} + \frac{b\beta_{pc}i_v^*r_c\mu_v}{N_c} + \mu_c\mu_c\mu_v + \mu_c\mu_v r_c \right. \\ \left. + \left( \frac{b\beta_{pc}s_c^*b\beta_{pc}i_v^*}{N_c N_c} \right) \left( \frac{b\beta_{pv} - b\beta_{pv}i_v^*}{N_c} \right) - \frac{b\beta_{pv}b\beta_{pc}s_c^*b\beta_{pc}i_v^*}{N_c N_c N_c} \right. \\ \left. - \frac{b\beta_{pv}b\beta_{pc}s_c^*\mu_c}{N_c N_c} + \frac{b\beta_{pv}i_v^*b\beta_{pc}s_c^*b\beta_{pc}i_v^*}{N_c N_c N_c} + \frac{b\beta_{pv}i_v^*b\beta_{pc}s_c^*\mu_c}{N_c N_c} \right)$$

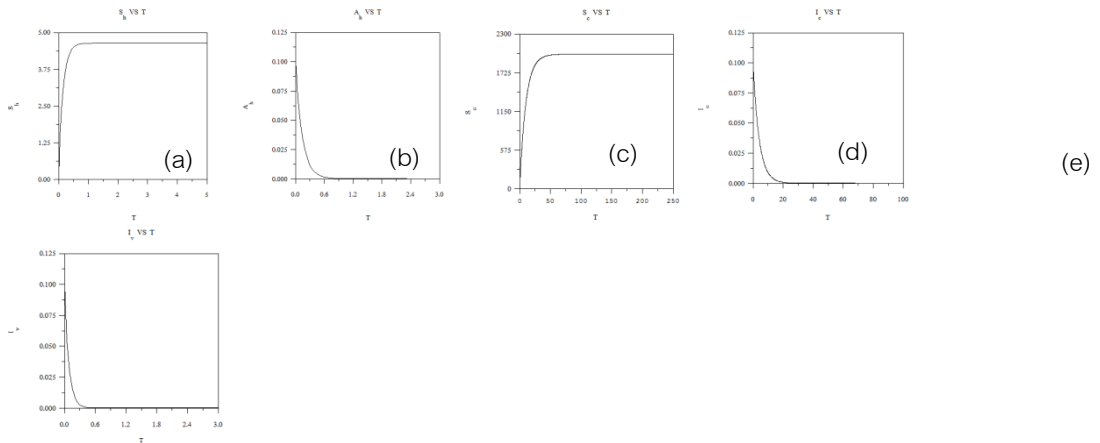
ดังนั้นจุดสมดุลภายใต้สภาวะที่เกิดการระบาดของโรคมีความเสถียรภาพเมื่อ  $\mathcal{R}_0 > 1$  โดยที่

$$\text{ค่าระดับการติดเชื้อของโรค } \mathcal{R}_0 = \sqrt{\left(\frac{b\beta_{pv}}{N_h}\right)\left(\frac{1}{\mu_h + \delta}\right)\left(\frac{b\beta_{ph}\lambda_h}{N_h\mu_h\mu_v}\right) + \left(\frac{b\beta_{pv}}{N_c}\right)\left(\frac{1}{\mu_c + r_c}\right)\left(\frac{b\beta_{pc}\lambda_c}{N_c\mu_c\mu_v}\right)}$$

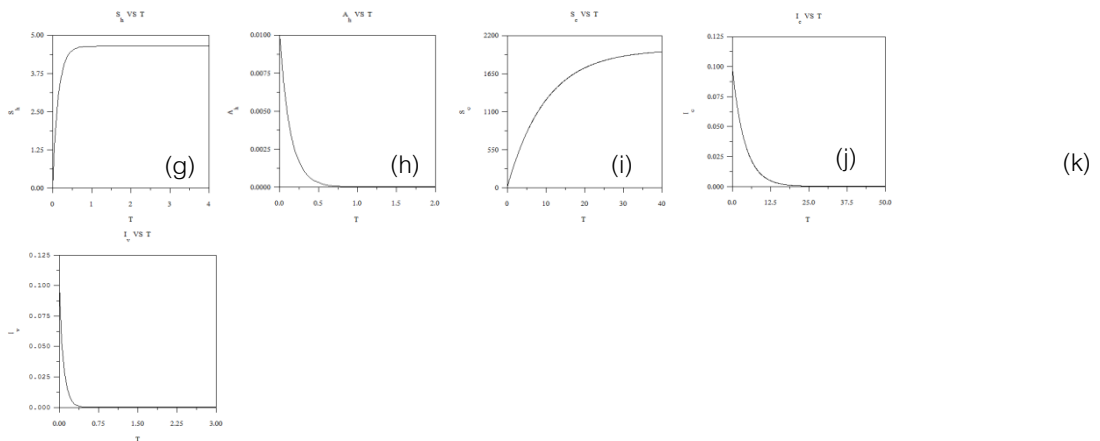
### ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ข้อมูลเชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจากสถาบันวิจัยประชากรและสังคม. (2555) และงานวิจัย Supriatna & Anggtiani N., (2010), และ Supriatna A.K., Serviana H. & Soewono E., (2009)

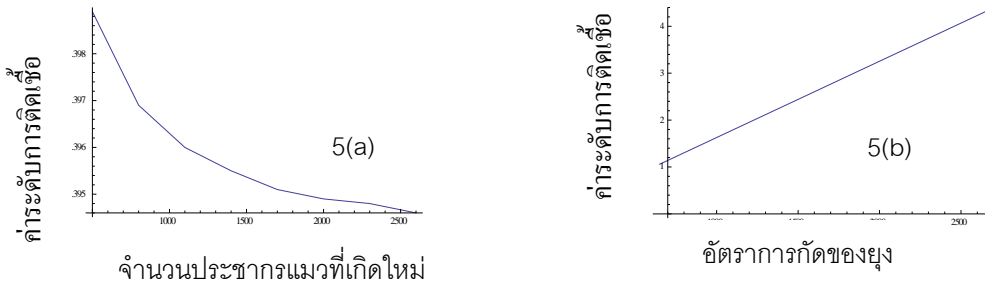




**ภาพที่ 3** คำตอบของสมการ (1), (2), (4), (5) และ (7) ภายใต้สภาวะที่ไม่มีโรค ดังนี้ (a) กลุ่มประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (b) กลุ่มประชากรคนที่เป็นโรคเรื้อรัง (c) กลุ่มประชากรแมวที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (d) กลุ่มประชากรแมวที่ติดเชื้อ และ (e) กลุ่มประชากรยุงที่ติดเชื้อ โดยที่  $\mathcal{R}_0 = 0.4068 < 1$   $\lambda_h = 32$ ,  $\lambda_c = 200$ ,  $\lambda_v = 1,000,000$ ,  $\beta_{ph} = 0.01$ ,  $\beta_{pc} = 0.01$ ,  $\beta_{pv} = 0.1$ ,  $\mu_h = 6.9$ ,  $\mu_c = 1/10$ ,  $\mu_v = 365(1/30)$ ,  $N_h = 1,000,000$ ,  $N_c = 100,000$ ,  $r_c = 0.1428$ ,  $\delta = 0.25$ ,  $b = 250$  และค่าลักษณะเฉพาะคือ  $\lambda_1 = -6.9$  และ  $\lambda_2 = -1/10$



**ภาพที่ 4** คำตอบของสมการ (1), (2), (4), (5) และ (7) ภายใต้สภาวะที่มีการระบาดของโรค ดังนี้ (a) กลุ่มประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (b) กลุ่มประชากรคนที่เป็นโรคเรื้อรัง (c) กลุ่มประชากรแมวที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (d) กลุ่มประชากรแมวที่ติดเชื้อ และ (e) กลุ่มประชากรยุงที่ติดเชื้อ โดยที่  $\mathcal{R}_0 = 1.0577 > 1$



**ภาพที่ 5** 5(a) อัตราการเพิ่มจำนวนประชากรแมวที่เกิดใหม่ที่มีผลต่อค่าระดับการติดเชื้อ และ 5(b) อัตราการเกิดของยุงที่มีผลต่อค่าระดับการติดเชื้อ โดยที่  $\lambda_h = 32$ ,  $\lambda_v = 1,000,000$ ,  $\beta_{ph} = 0.01$ ,  $\beta_{pc} = 0.01$ ,  $\beta_{pv} = 0.1$ ,  $\mu_h = 6.9$ ,  $\mu_c = 1/10$ ,  $\mu_v = 365(1/30)$ ,  $N_h = 1,000,000$ ,  $N_c = 100,000$ ,  $r_c = 0.1428$ ,  $\delta = 0.25$ ,  $b = 250$

## สรุป

จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อศึกษาจุดสมดุลของระบบ ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล และตรวจสอบเสถียรภาพของจุดสมดุลว่าเป็น Local asymptotically stable และตรวจสอบว่าสอดคล้องตามเงื่อนไข Routh-Hurwitz ในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค พบว่าค่าระดับการติดเชื้อ ( $\mathcal{R}_0$ ) เท่ากับ 0.4068 และจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค เมื่อพิจารณาให้พารามิเตอร์ เพื่อศึกษาใน 2 กรณี คือ

1. เมื่อค่าพารามิเตอร์ จำนวนประชากรแมวที่เกิดใหม่ ( $\lambda_c$ ) พบว่าการเพิ่มค่าพารามิเตอร์ จำนวนประชากรแมวที่เกิดใหม่ ( $\lambda_c$ ) ที่มีค่าพารามิเตอร์ที่แตกต่างกัน ทำให้ค่าสมการลักษณะเฉพาะและหาคำตอบของสมการลักษณะเฉพาะเป็นไปตามเงื่อนไข Routh-Hurwitz แต่ค่า  $\mathcal{R}_0$  มีค่าลดลง และไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้  $\mathcal{R}_0 > 1$  ดังนั้นการเพิ่มพารามิเตอร์จำนวนประชากรแมวที่เกิดใหม่จึงไม่มีผลทำให้เกิดการแพร่ระบาดของโรคเท้าช้าง

2. เมื่อค่าพารามิเตอร์อัตราการเกิดของประชากรยุง (b) โดยแบ่งอัตราการเกิดของประชากรยุงออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้ เมื่อค่าพารามิเตอร์อัตราการเกิดของประชากรยุงเท่ากับ 650 ครั้ง/วัน จะมีค่า  $\mathcal{R}_0 = 1.0577$  ดังนั้นตามเงื่อนไข Routh-Hurwitz สรุปได้ว่าการแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมว คือ ประชากรกลุ่มนี้ได้รับเชื้อบรูเซียมาลาไยมีจำนวนมากขึ้น 1.0577 เท่าจากจำนวนเริ่มต้น เมื่อค่าพารามิเตอร์อัตราการเกิดของประชากรยุงเท่ากับ 1,050 ครั้ง/วัน จะมีค่า  $\mathcal{R}_0 = 1.7086$  ดังนั้นตามเงื่อนไข Routh-Hurwitz สรุปได้ว่าการ

แพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมว คือ ประชากรกลุ่มนี้ได้รับเชื้อบรูเกียมาลาไย มีจำนวนมากขึ้น 1.7086 เท่าจากจำนวนเริ่มต้น และเมื่อค่าพารามิเตอร์อัตราการกัดของประชากรยุง เท่ากับ 1,450 ครั้ง/วัน จะมีค่า  $R_0 = 2.3595$  ดังนั้นตามเงื่อนไข Routh-Hurwitz สรุปได้ว่ามีการแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมว คือ ประชากรกลุ่มนี้ได้รับเชื้อ บรูเกียมาลาไย มีจำนวนมากขึ้น 2.3595 เท่าจากจำนวนเริ่มต้น จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจึงสรุปได้ว่าการเพิ่มอัตราการกัดของประชากรยุง มีผลทำให้มีการแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างที่มีผลกระทบมาจากแมวเพิ่มมากขึ้นจากค่าเริ่มต้น

### ข้อเสนอแนะ

1. ในงานวิจัยฉบับนี้ผู้วิจัยไม่ได้ศึกษาพารามิเตอร์ระยะฟักตัวของโรค จึงควรจะมีศึกษาพารามิเตอร์นี้ในการวิจัยครั้งต่อไป
2. ควรนำข้อมูลจริงมาใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของตัวแบบ เพื่อศึกษาความเป็นไปได้ของคำตอบเชิงตัวเลขว่ามีความสอดคล้องกับข้อมูลจริง

### คำขอขอบคุณ

ผู้เขียนขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี และผู้มีส่วนเกี่ยวข้องที่ให้การสนับสนุน

### เอกสารอ้างอิง

- สถาบันวิจัยประชากรและสังคม. (6 มกราคม 2556). *ประชากรของประเทศไทย พ.ศ. 2555*. สืบค้นจาก [http://www.ipsr.mahidol.ac.th/ipsr-th/population\\_thai.html](http://www.ipsr.mahidol.ac.th/ipsr-th/population_thai.html)
- สำนักโรคติดต่อนำโดยแมลง กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. (8 มกราคม 2556). *ข้อมูลโรคเท้าช้าง พ.ศ. 2555*. สืบค้นจาก <http://www.thaivbd.org/>
- สำนักโรคติดต่อนำโดยแมลง กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. (2549). *คู่มือในการดำเนินงานป้องกันควบคุมโรคเท้าช้าง*. นนทบุรี : ชุมชนสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- Esteva, L. & Vagus,C. (1998). Analysis of a dengue disease Transmission model. *Mathematical Bioscience*, 150, 131-151.
- Leah, E.K., (1998). *Mathematical Models in Biology*. New York : Random House.

- Supriatna, A.K., Serviana, H. & Soewono E. (2009). A Mathematical Model to Investigate the Long-Term Effects of the Lymphatic Filariasis Medical Treatment in Jati Sampurna, West Java. *ITB Journal of Science*, 41(Suppl. 1), 1-14.
- Supriatna, A.K., Anggriani, N. (2010). Lymphatic Filariasis Transmission and Control : A Mathematical Modelling Approach. *Current Tropics Medicine*, 10, 425-442.
- WHO model-prescribing information. (1995). *Drug used in parasitic diseases; 2<sup>nd</sup> ed.* Geneva : World Health Organization (WHO).